Analyse mathématique de la mécanique quantique

Semaine de la recherche 2025

Sébastien Breteaux

Institut Élie Cartan de Lorraine

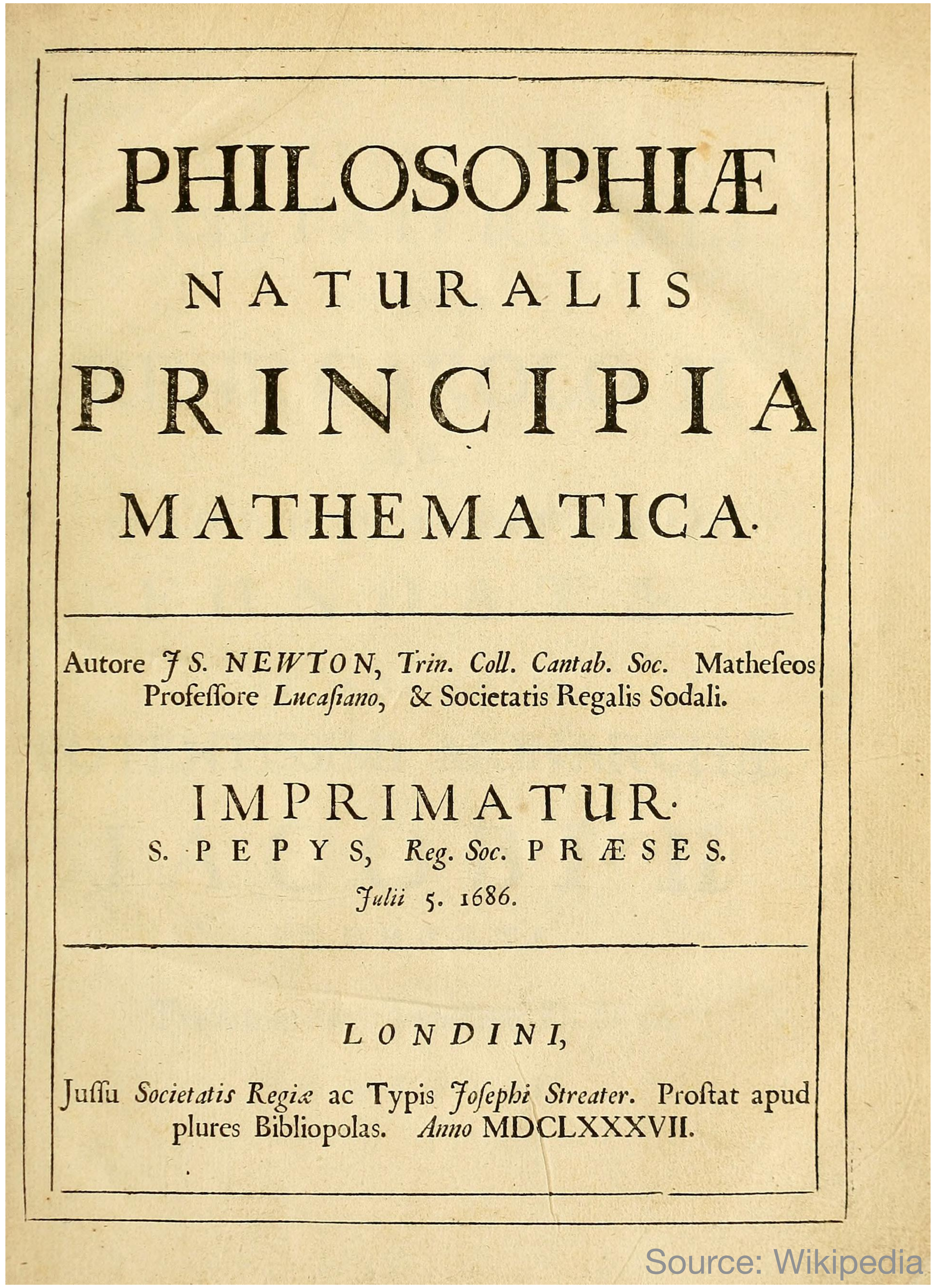
Isaac Newton

1642-1727

Seconde loi de Newton

1686

$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}t^2}$$



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *J S.* NEWTON, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheſeos Profeſſore *Lucaſiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

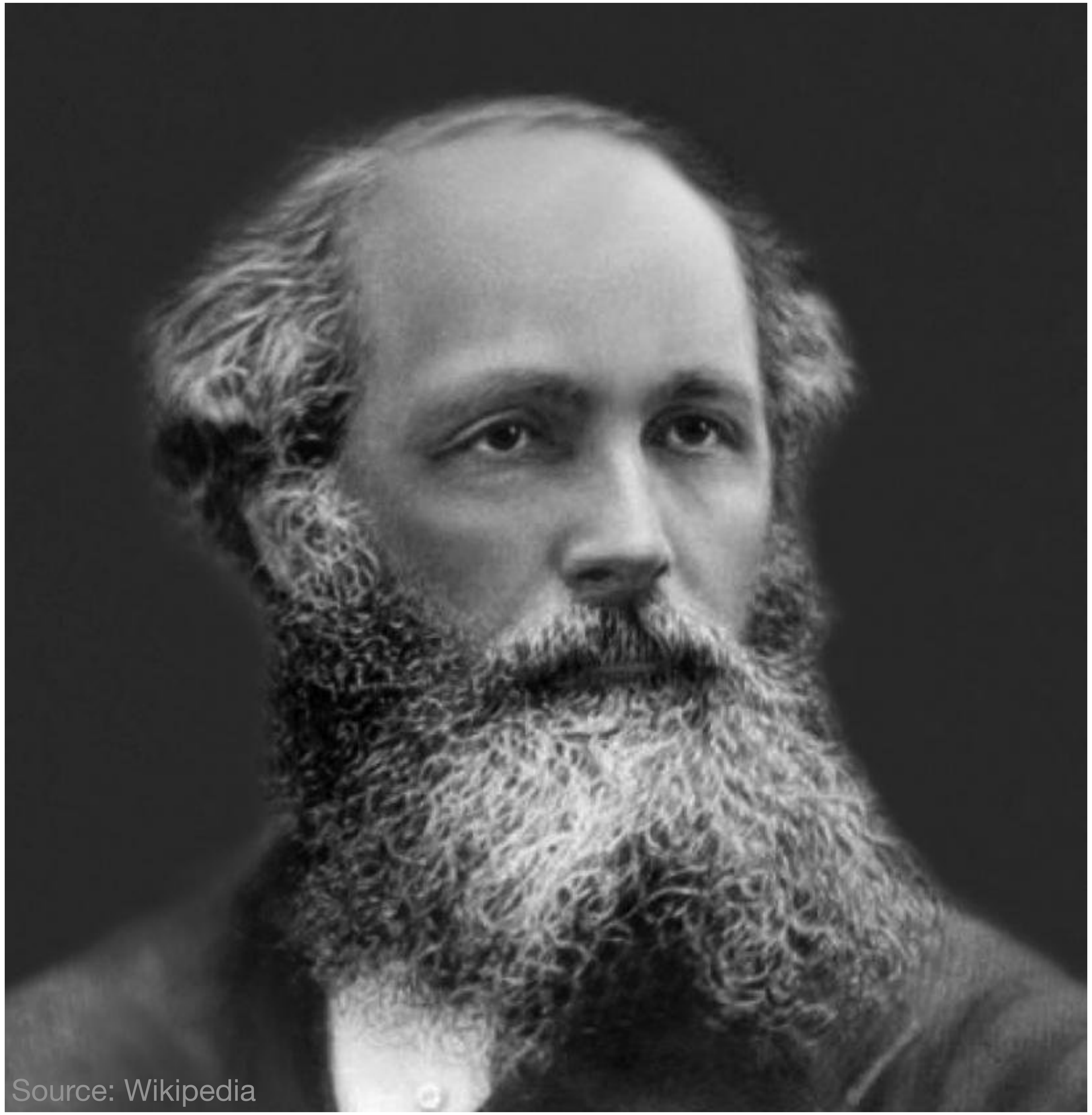
LONDINI,

Juſſu *Societatis Regiæ* ac Typis *Joſephi Streater*. Proſtat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Source: Wikipedia

James Clerk Maxwell

1831-1879



Équations de Maxwell

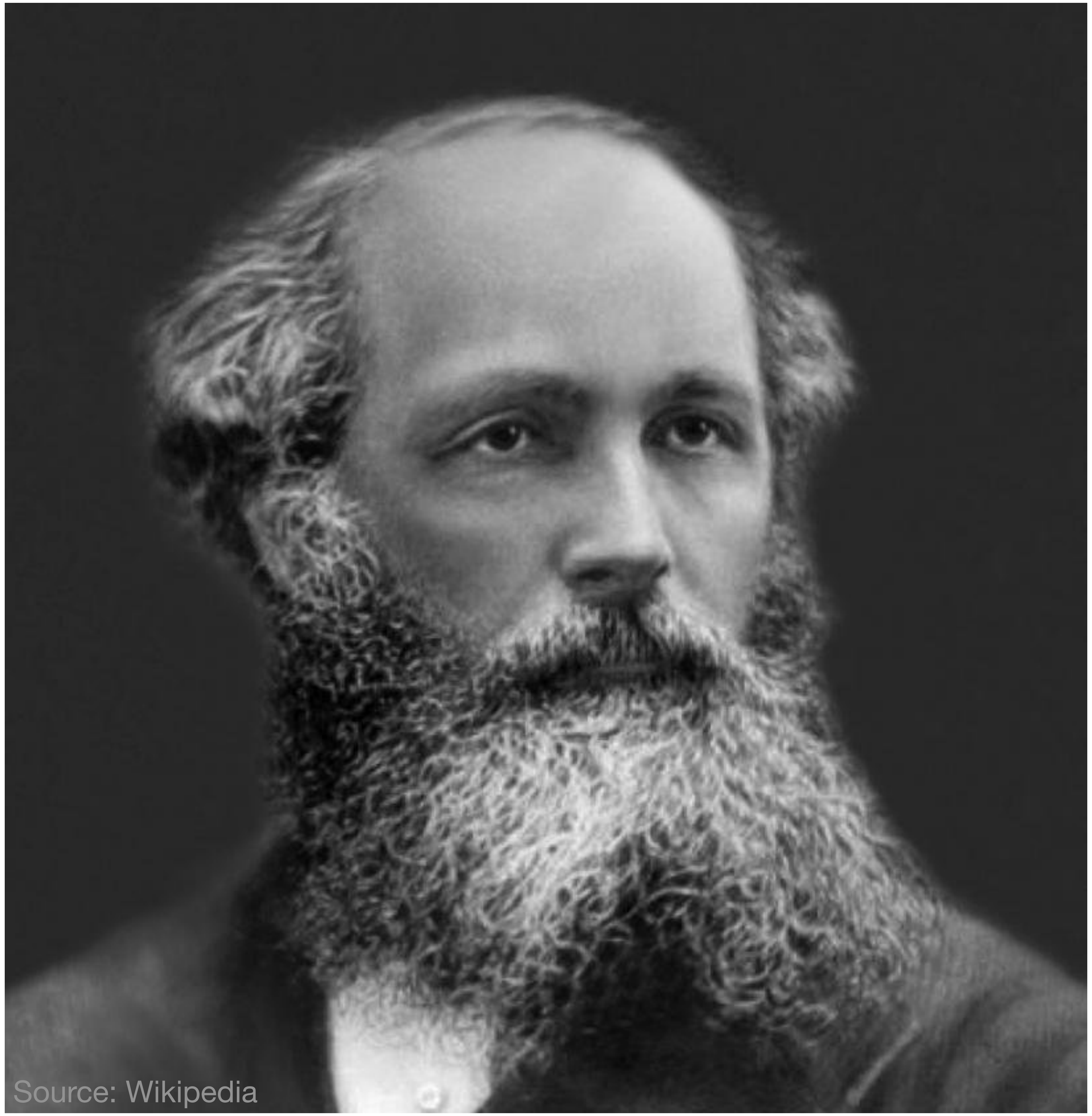
1865

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

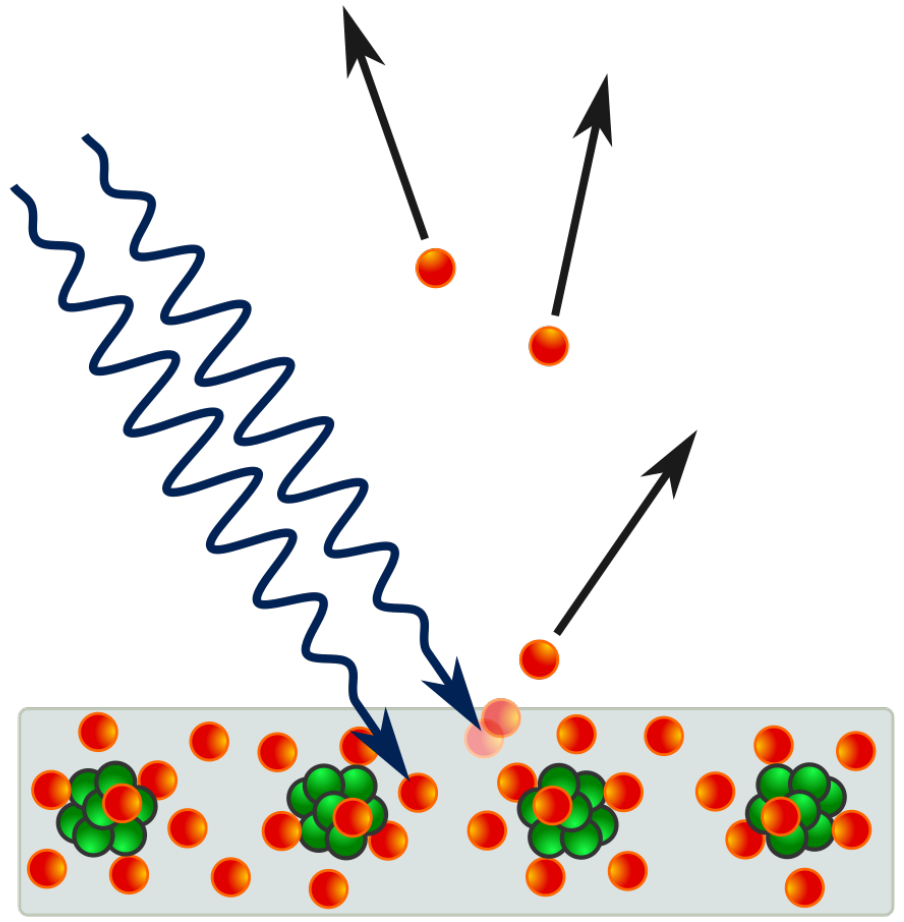
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

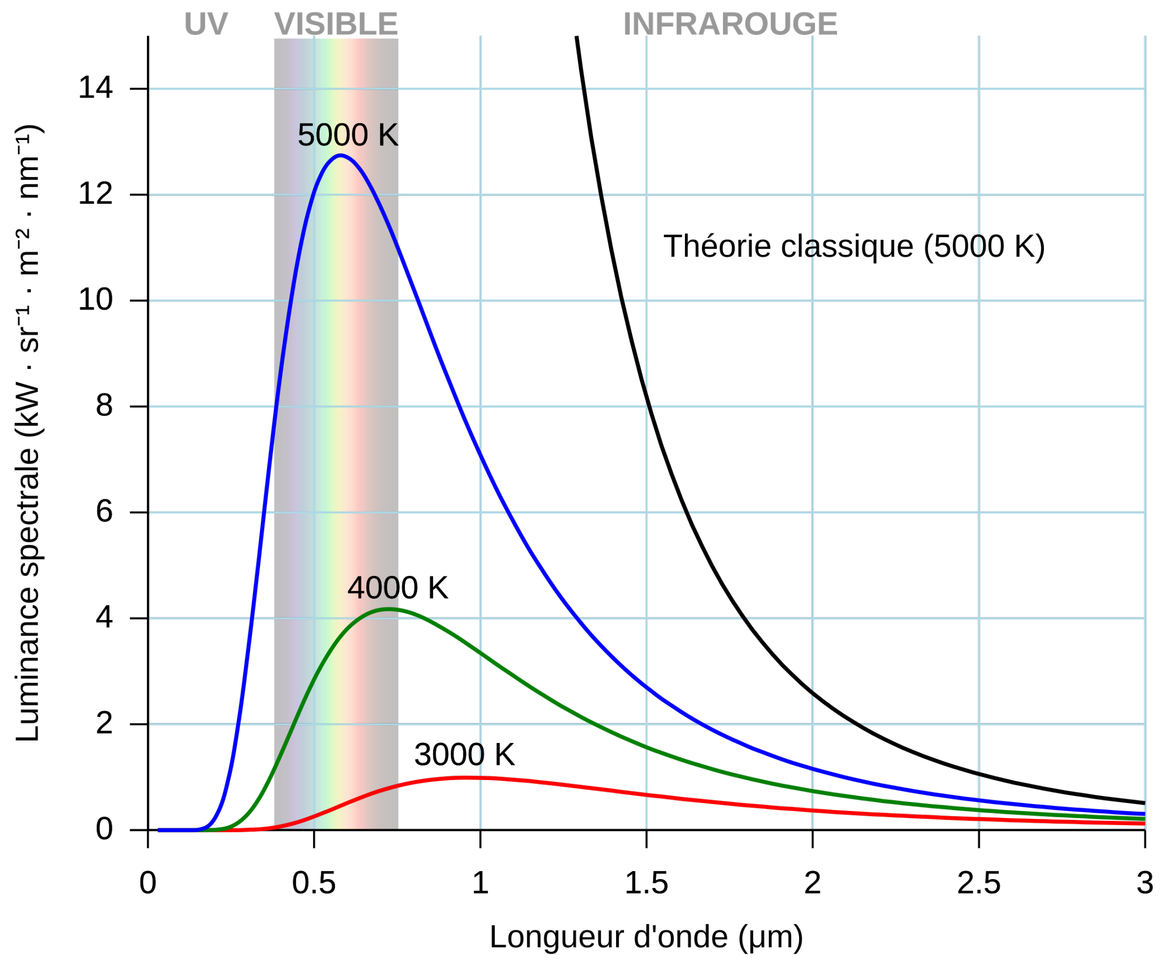
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

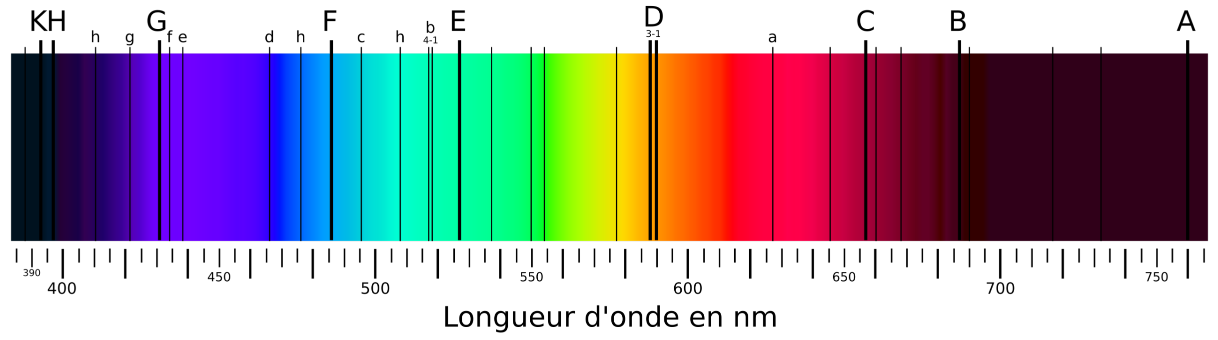
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$



Des phénomènes inexpliqués

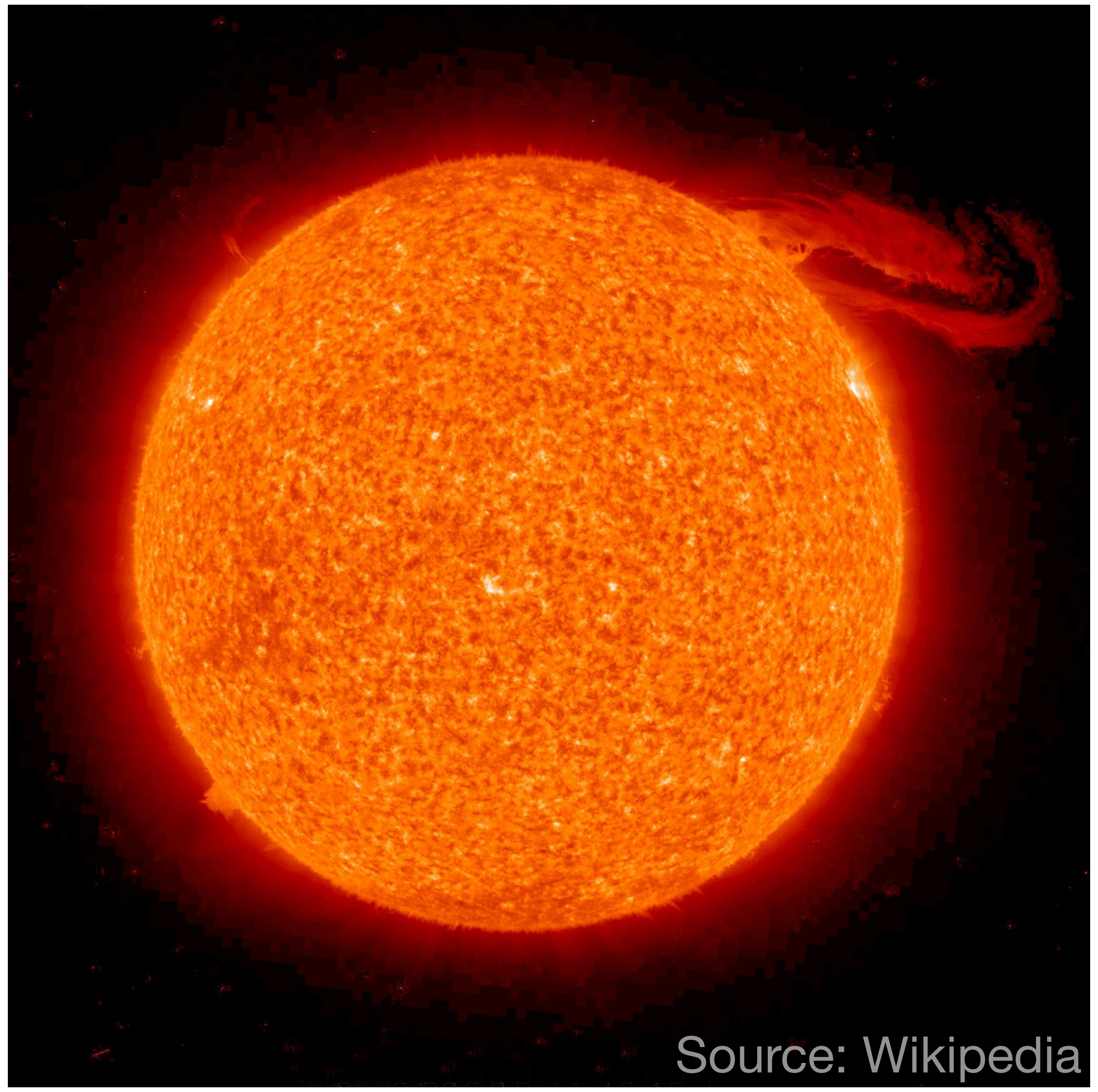


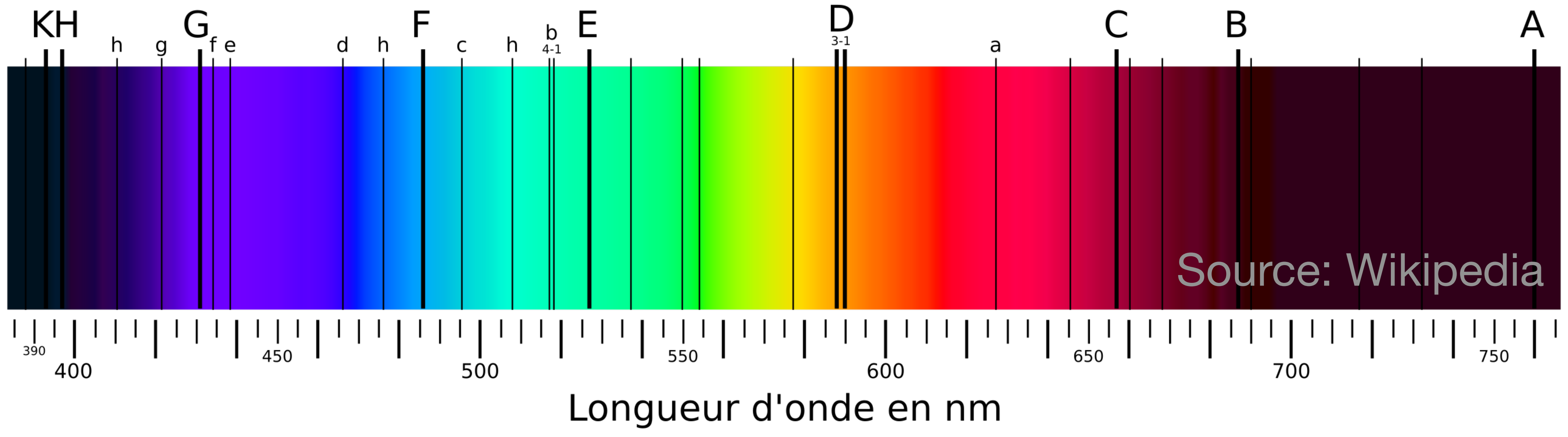




Raies spectrales

Joseph von Fraunhofer ~1817





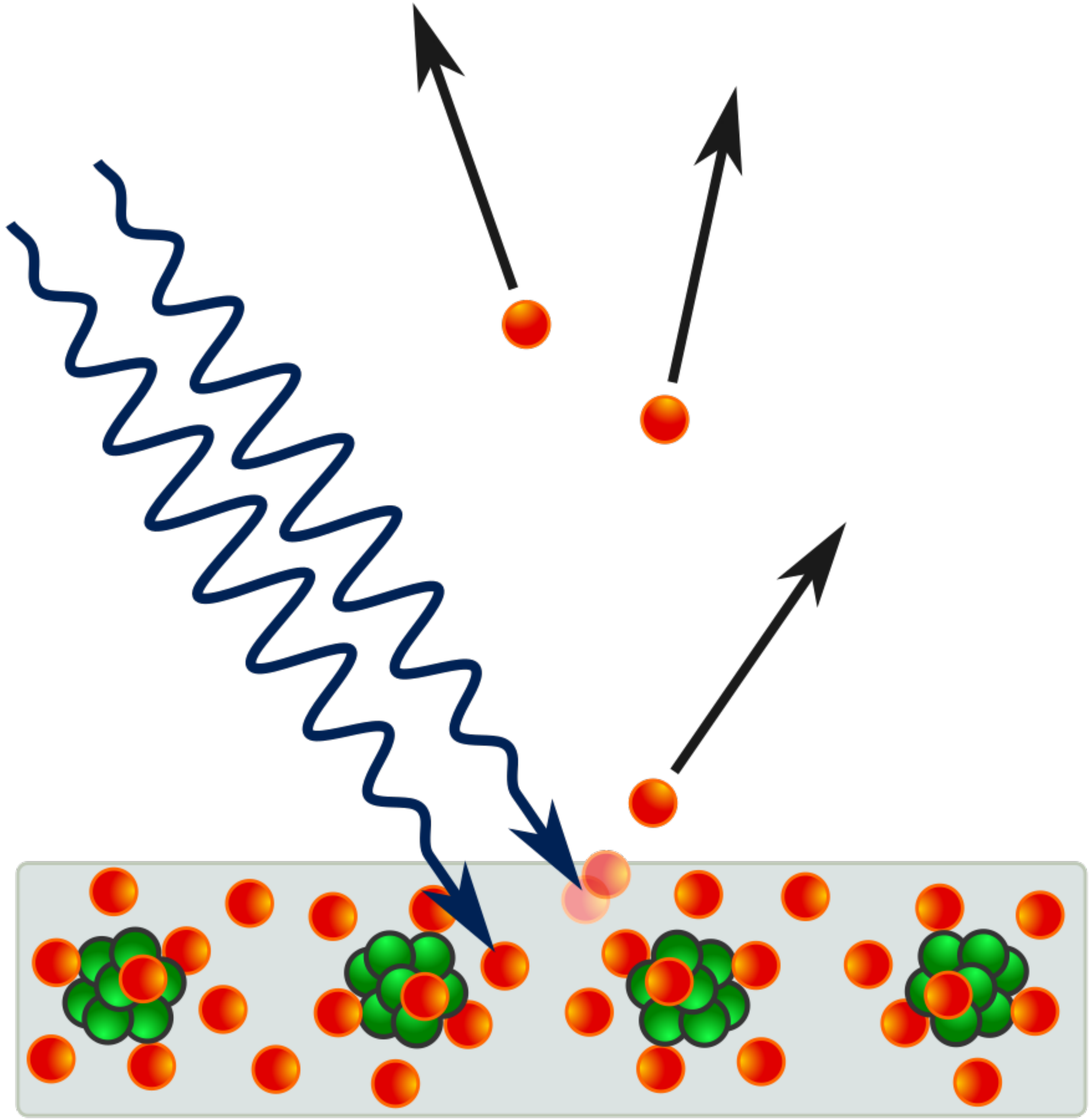
L'effet photoélectrique

Heinrich Hertz 1887

Un matériau reçoit de la lumière.

Si la longueur d'onde assez petite,

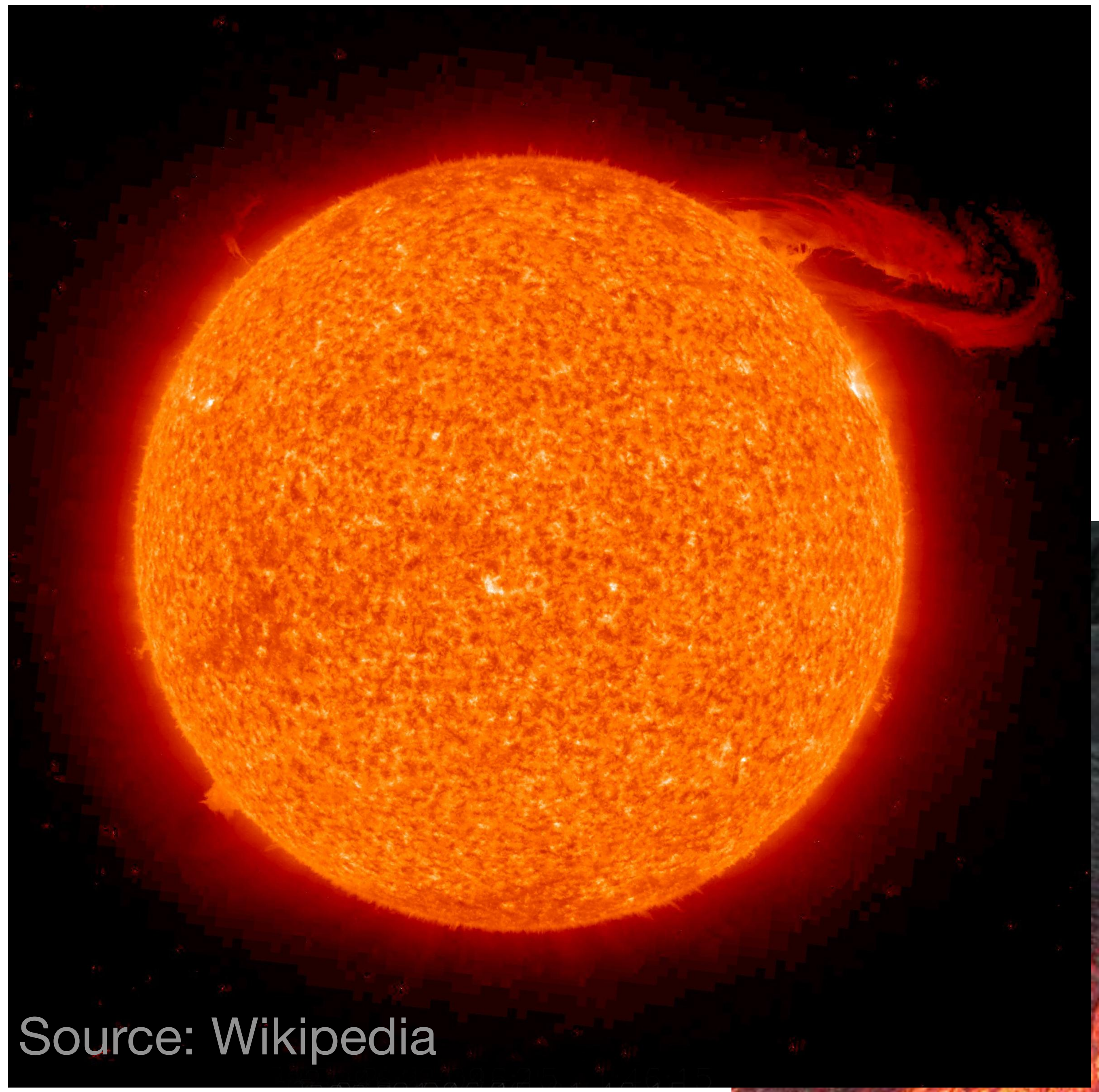
le matériau libère des électrons.

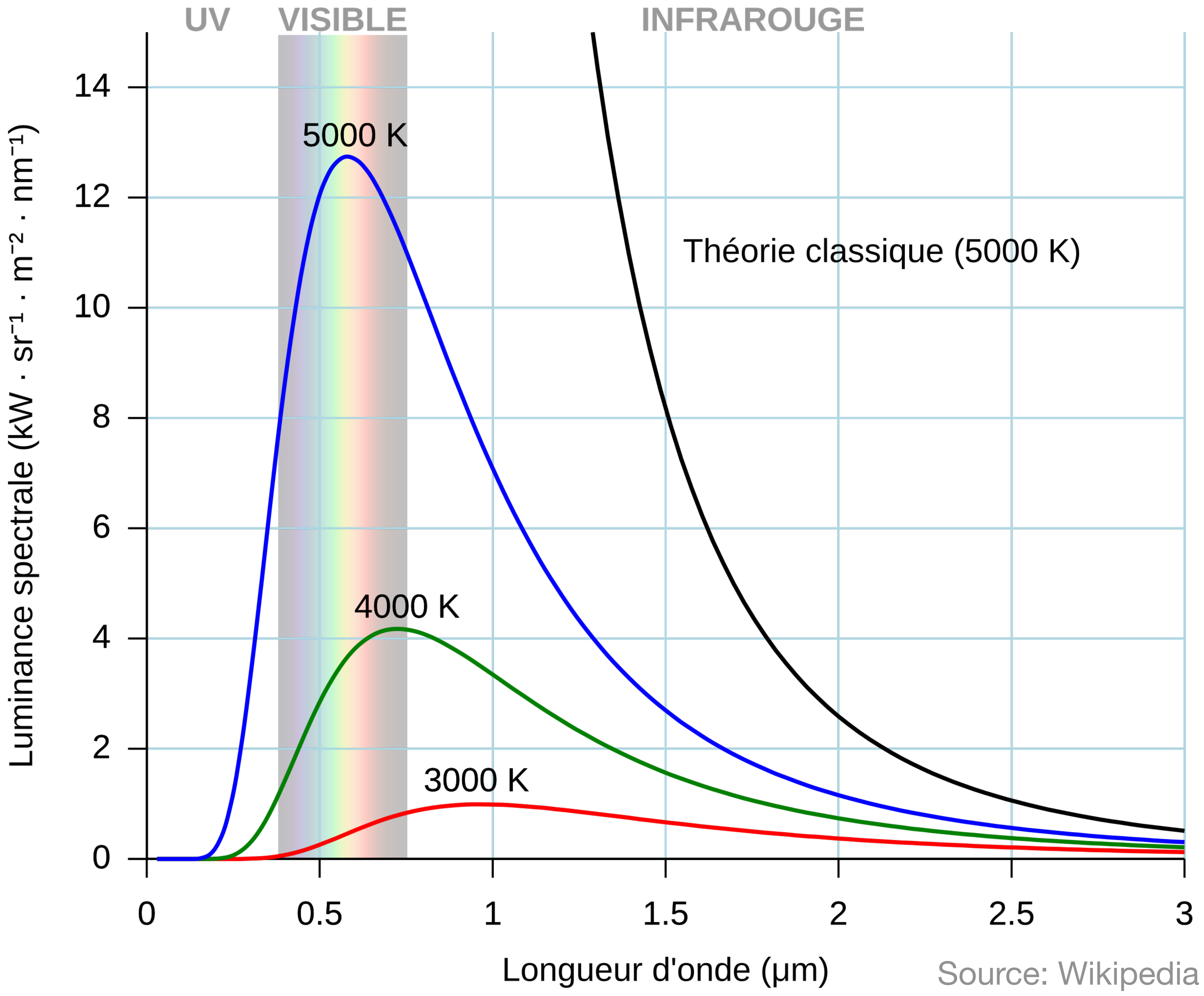


Source: Wikipedia

Le corps noir

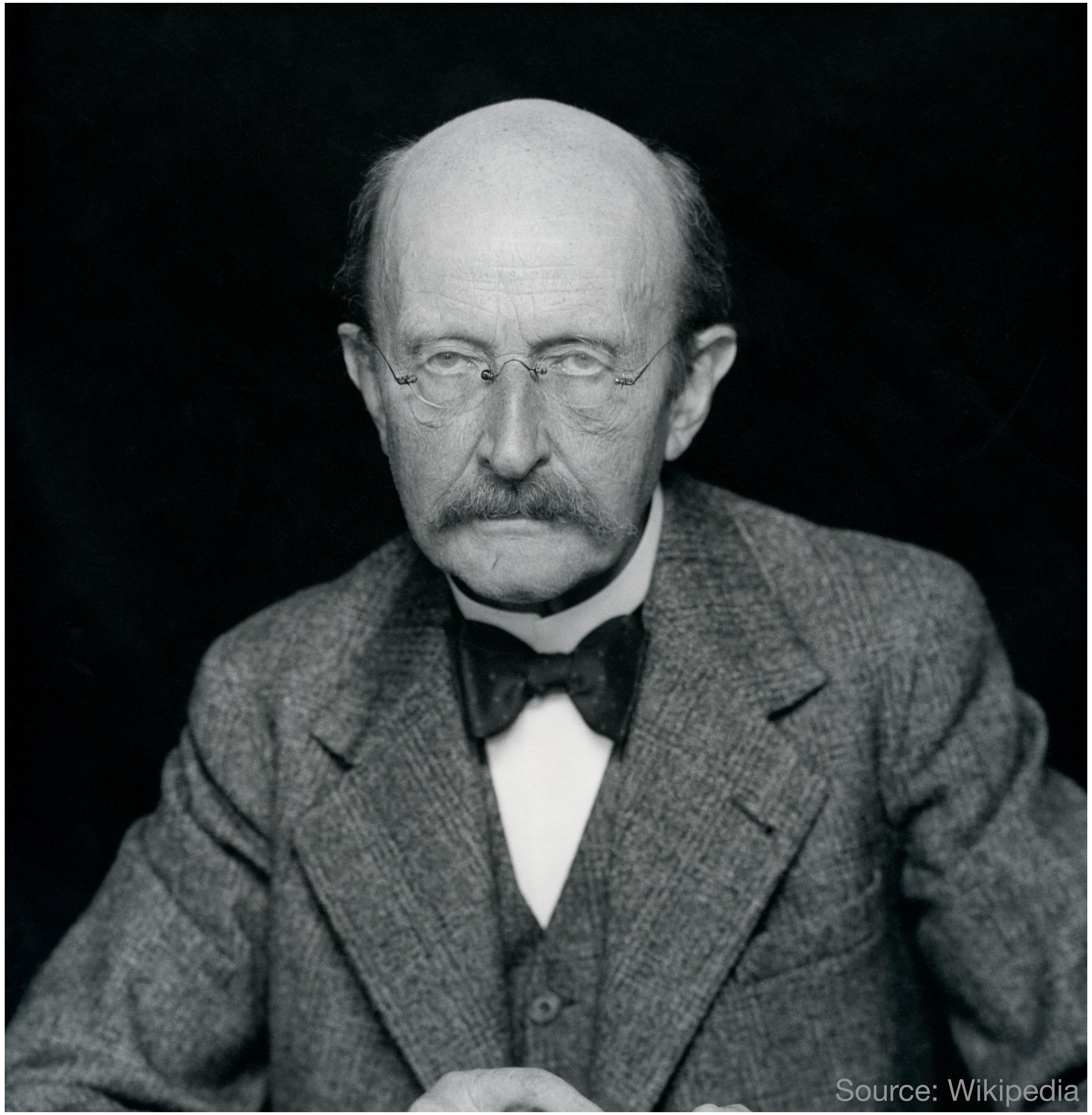
et son rayonnement





Max Planck

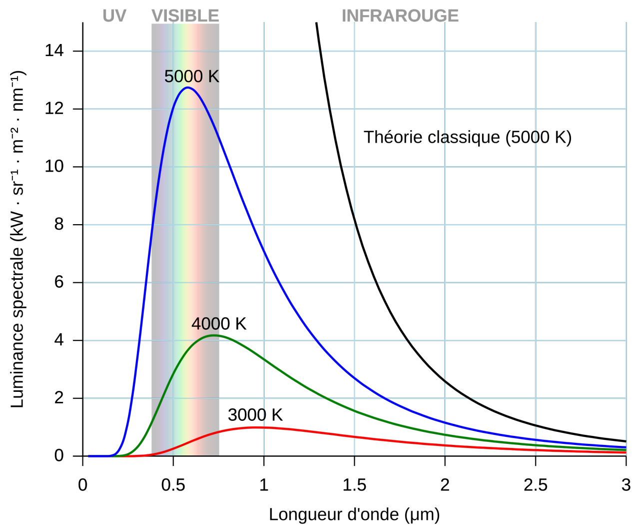
1858-1947



Loi de Planck

1900

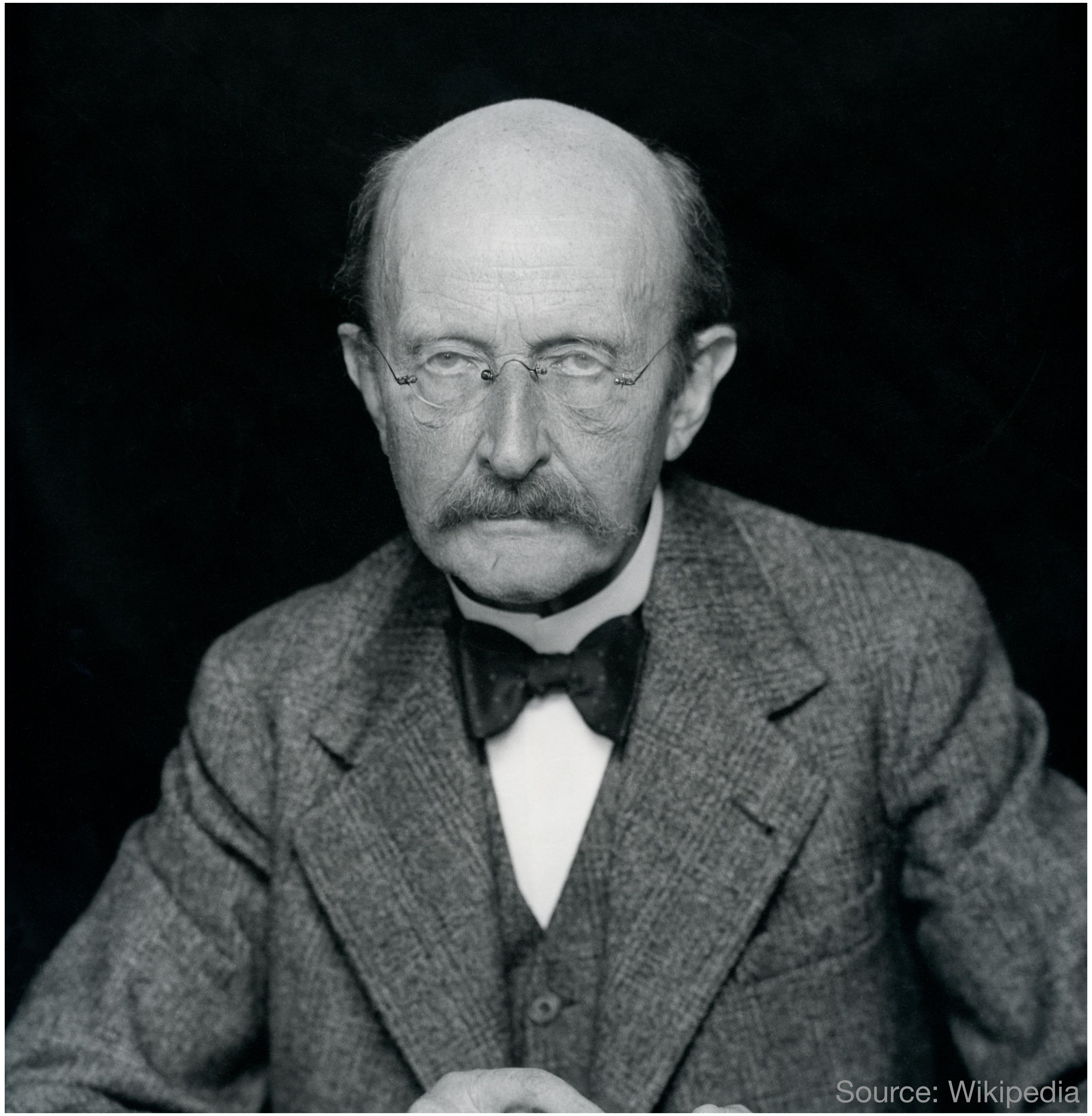
$$L(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$



Trouvée en supposant que l'énergie dans une cavité prend des valeurs de la forme

$$n\frac{hc}{\lambda}$$

avec $n \in \mathbb{N}$.



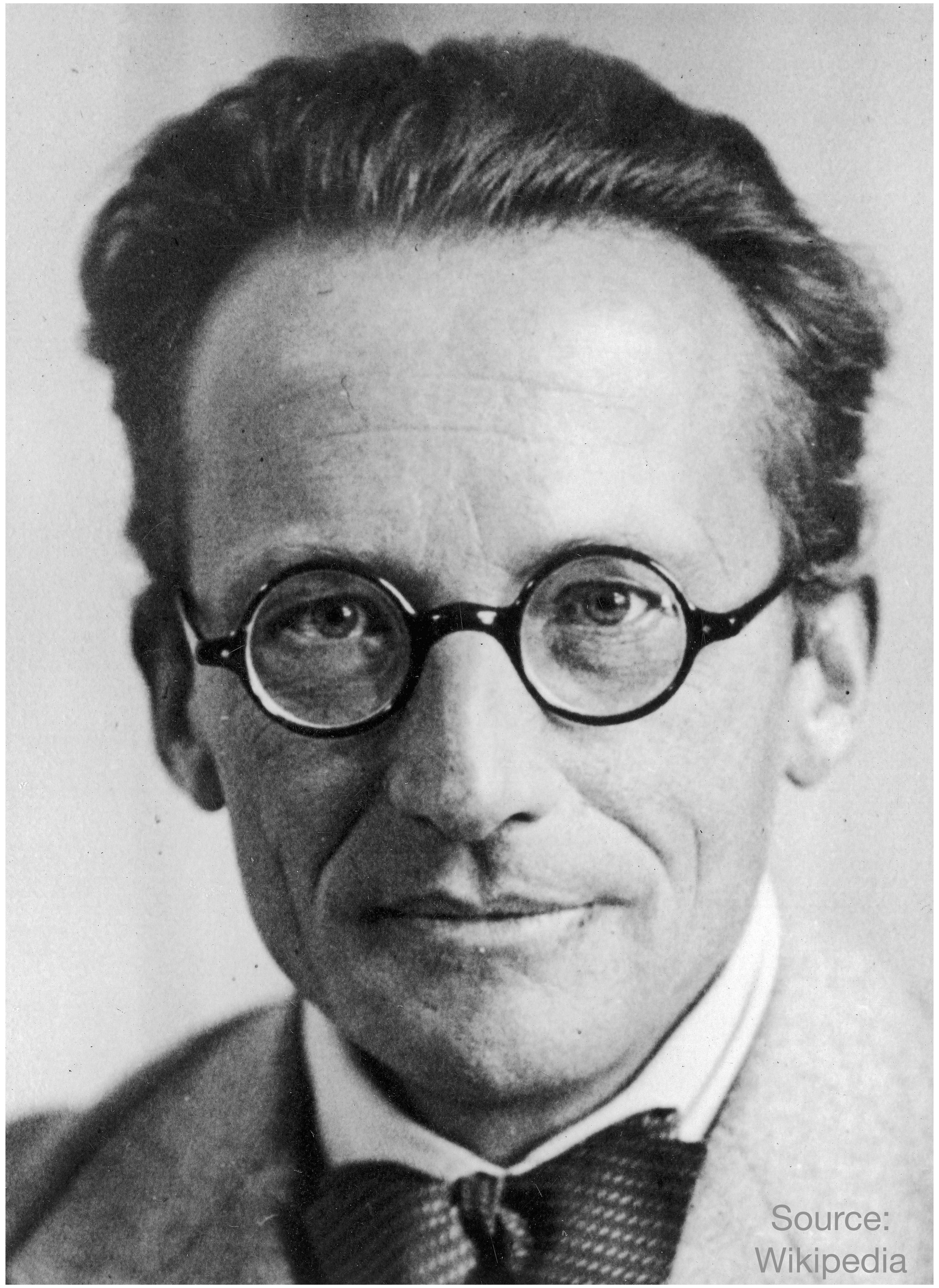
Mécanique Quantique

Congrès de Solvay

1927

Erwin Schrödinger

1887-1961



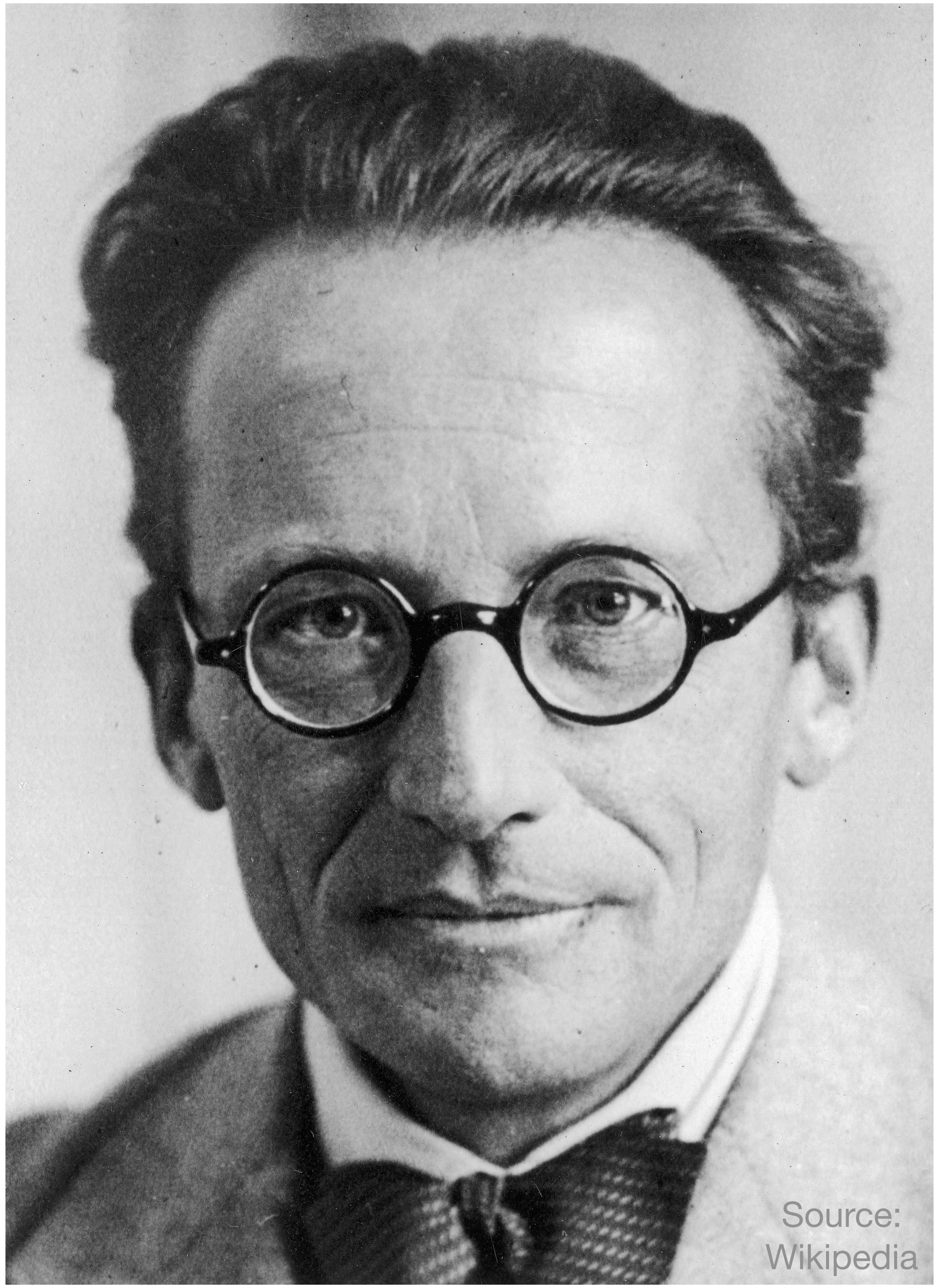
Équation de Schrödinger

1926

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi$$

où

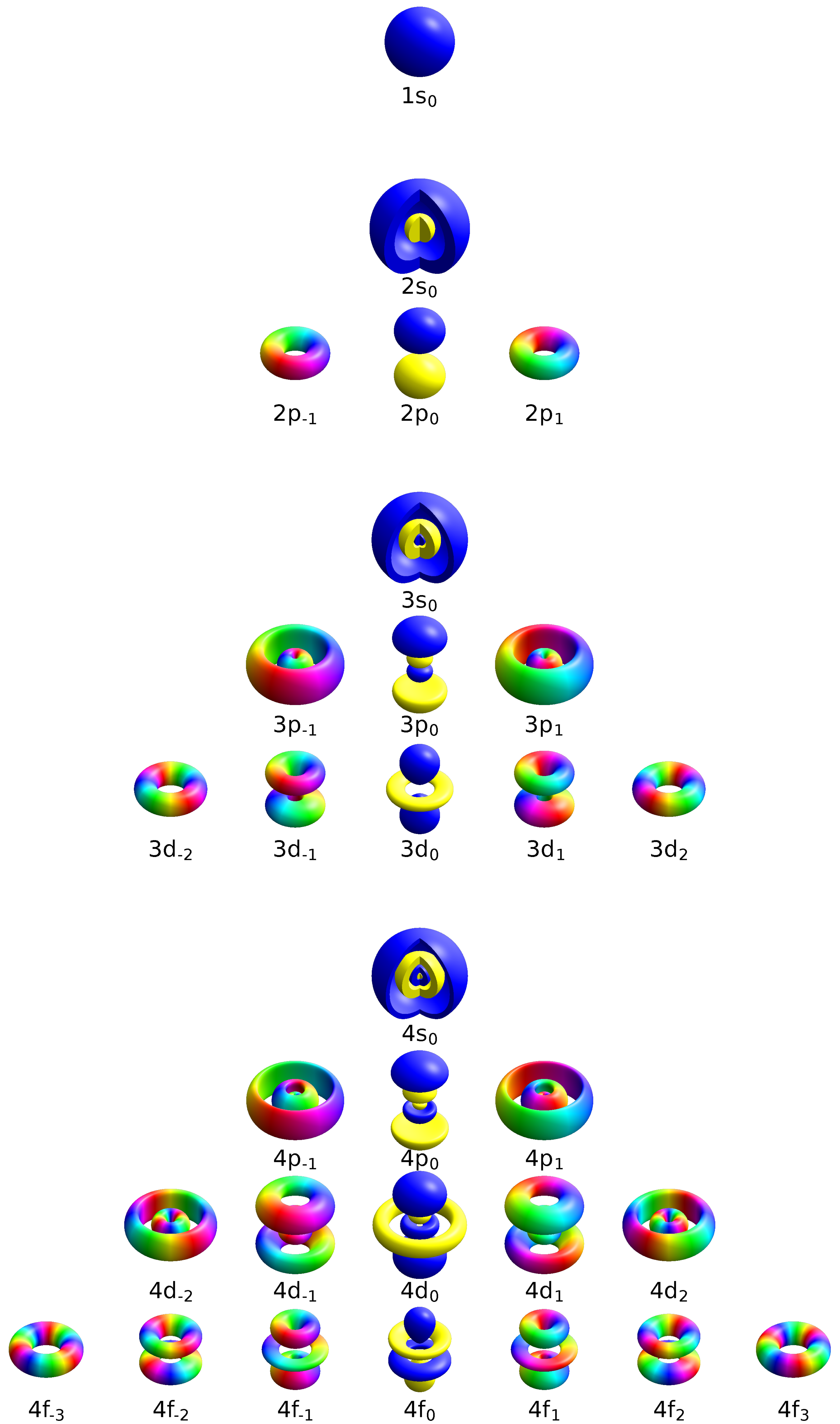
$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\,.$$



Atome hydrogénoïde

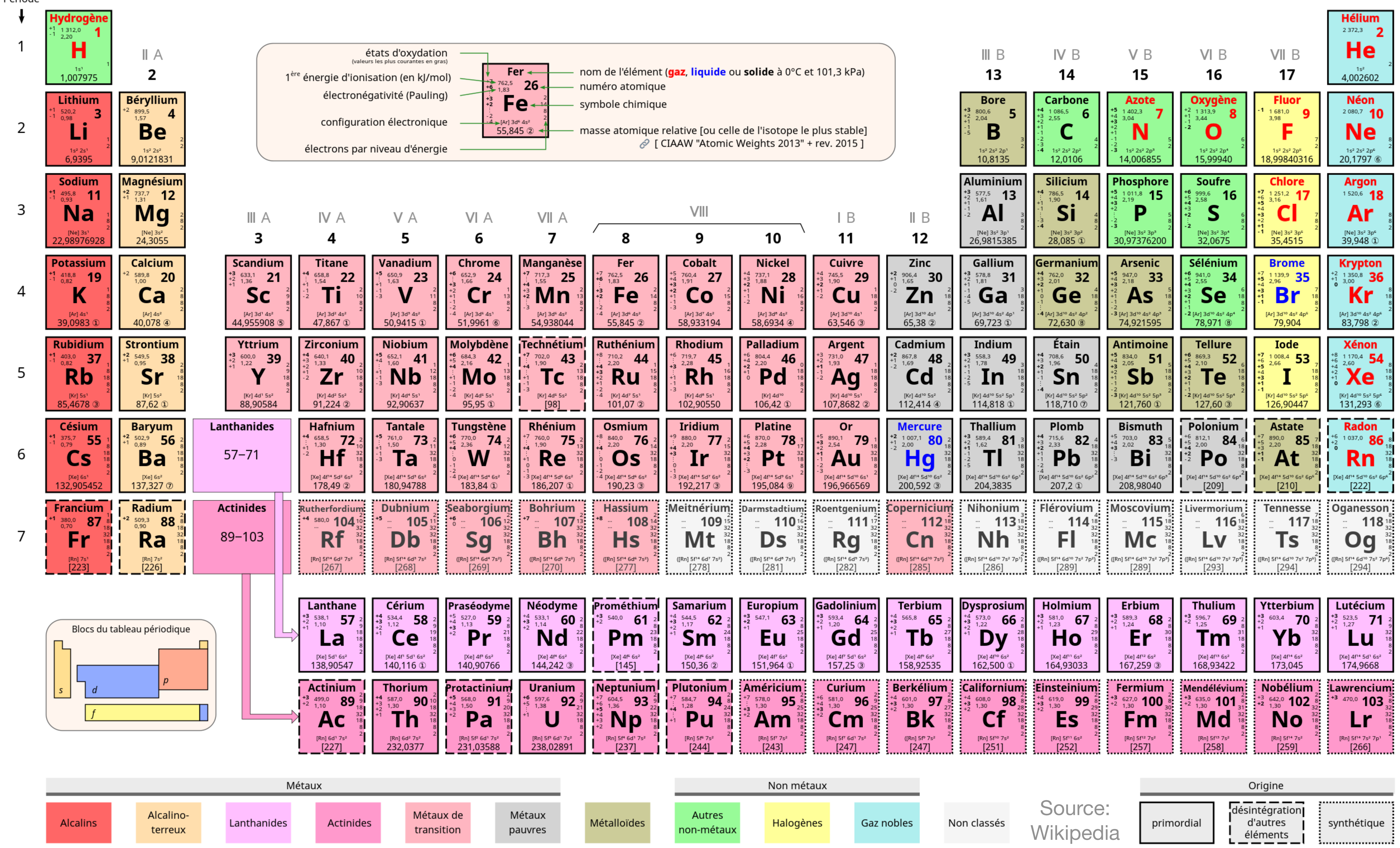
$$V(x, y, z) = -\frac{Ze^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

On peut calculer explicitement les vecteurs propres de $-\Delta + V$.



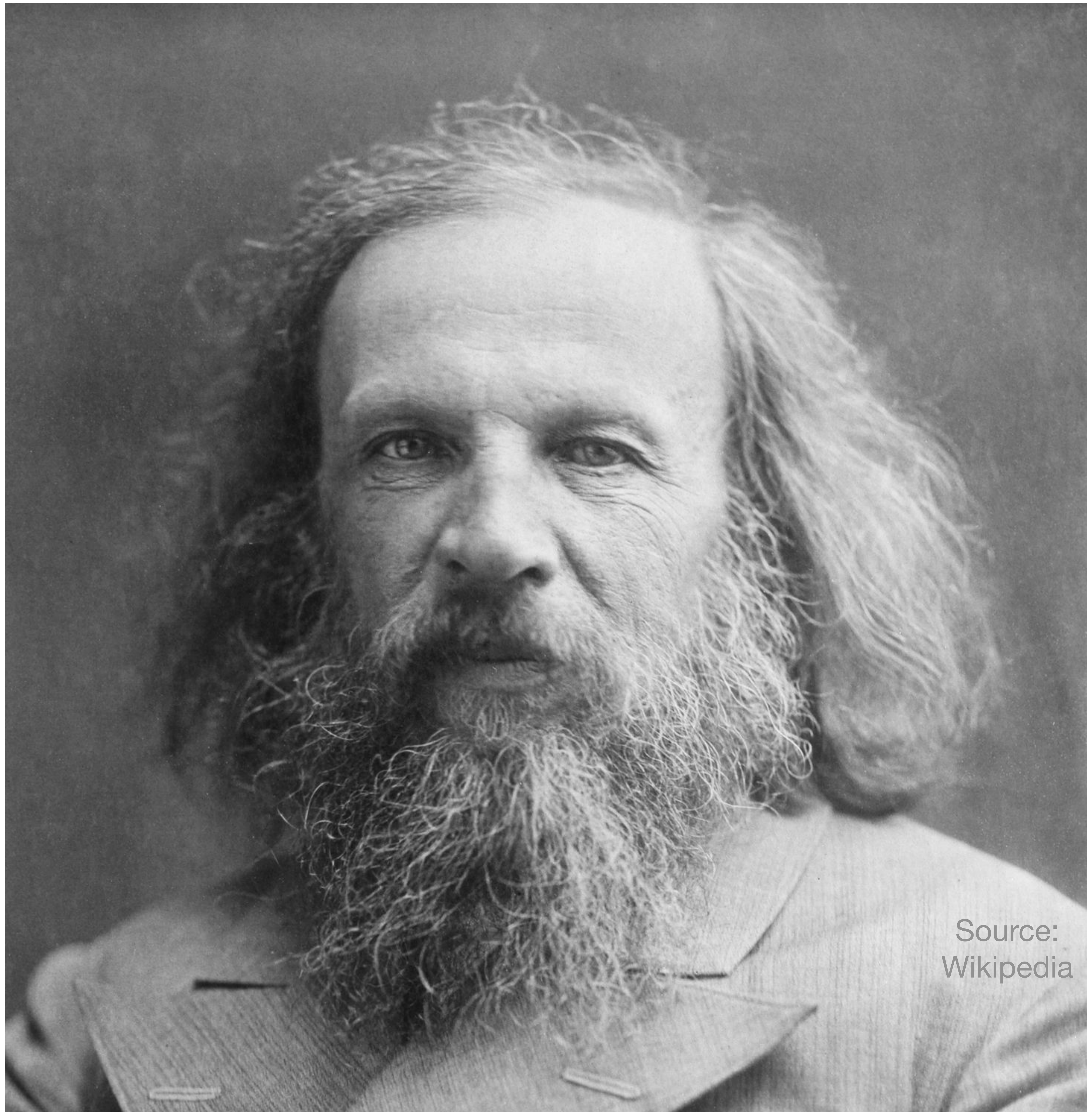
Source: Wikipedia

Tableau périodique des éléments



Дмитрій Ивановичъ Менделѣевъ (Dimitri Ivanovitch Mendeleïev)

1834-1907



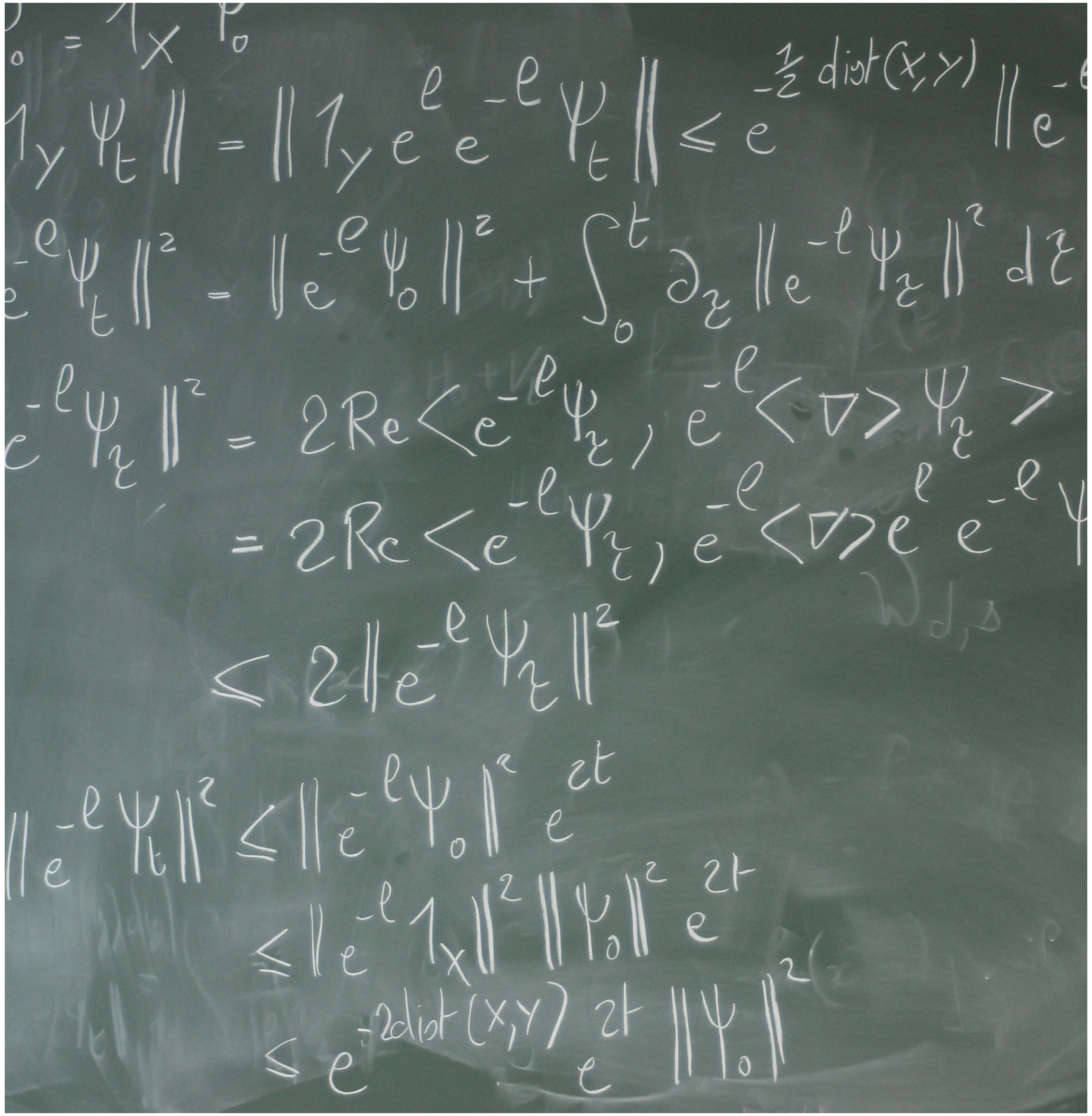

ARTICLES DE MATHÉMATIQUES DONT LE TITRE CONTIENT "ÉQUATION DE SCHRÖDINGER" RÉFÉRENCÉS SUR ZBMATH.ORG
Nombre
1000
100
10
1
Année
1931
1936
1941
1946
1951
1956
1961
1966
1971
1976
1981
1986
1991
1996
2001
2006
2011
2016
2021

Et la recherche actuelle?

Des équations variées

- Plusieurs particules en interaction
- Différents types de particules
- Éq. de Schrödinger non-linéaire
- Cas semi-relativistes:

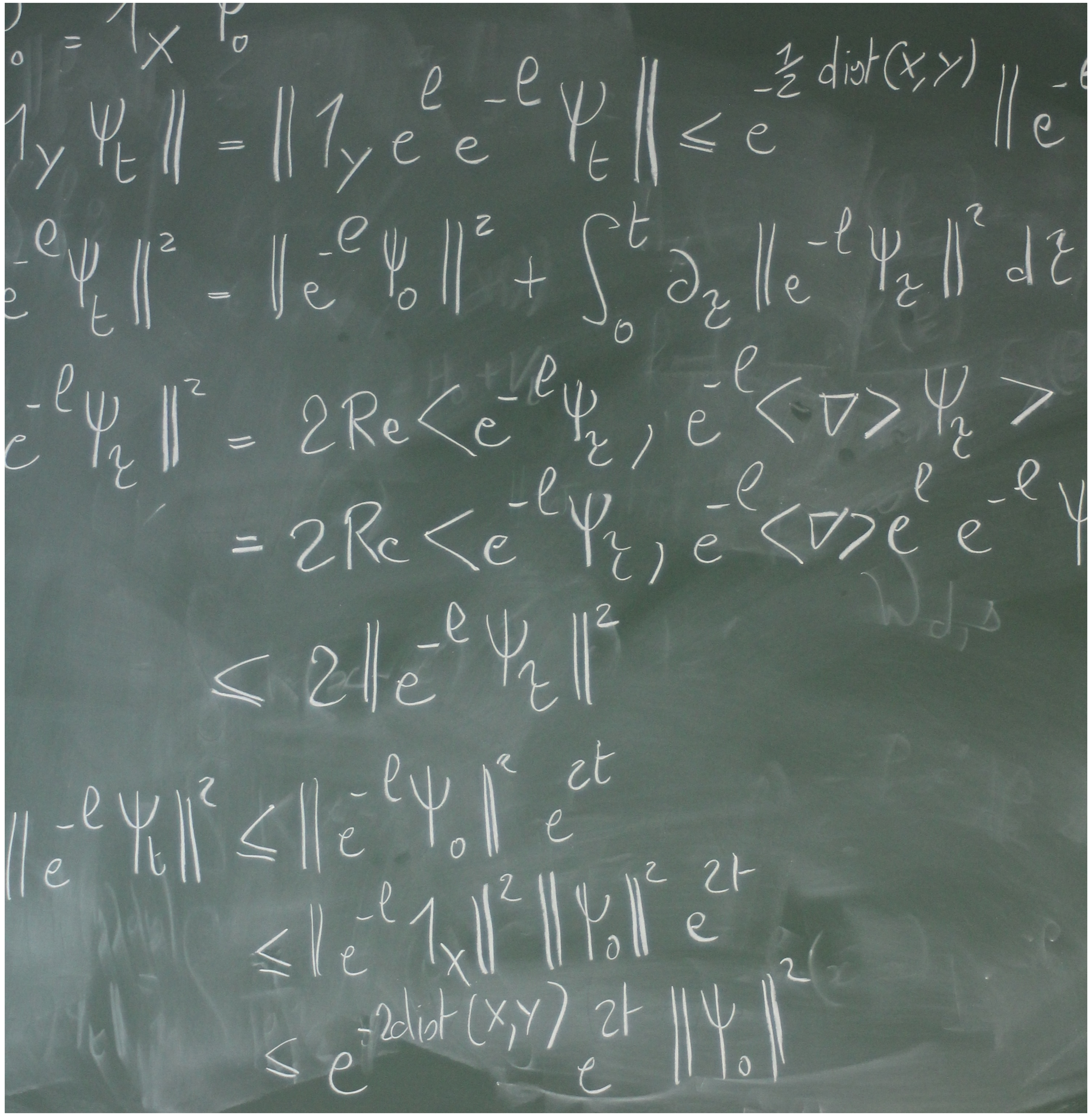
$$-\Delta \text{ devient } \sqrt{1-\Delta}.$$



Et la recherche actuelle?

Diverses questions

- Existence et unicité
- État fondamental, États excités
- Scattering
- Modèles approchés
- Grand nombre de particules
- Vitesse maximale
- …



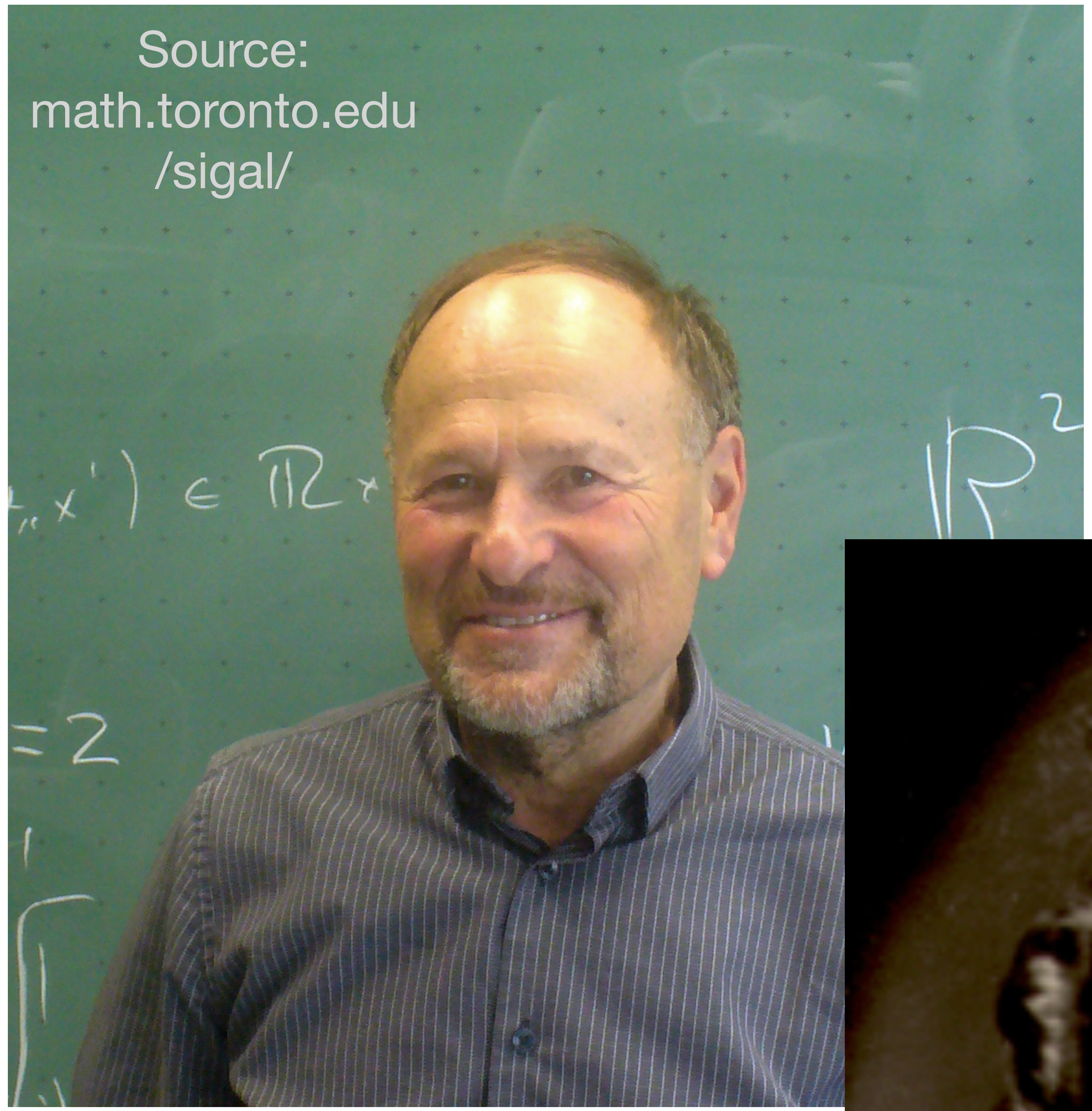
Vitesse maximale

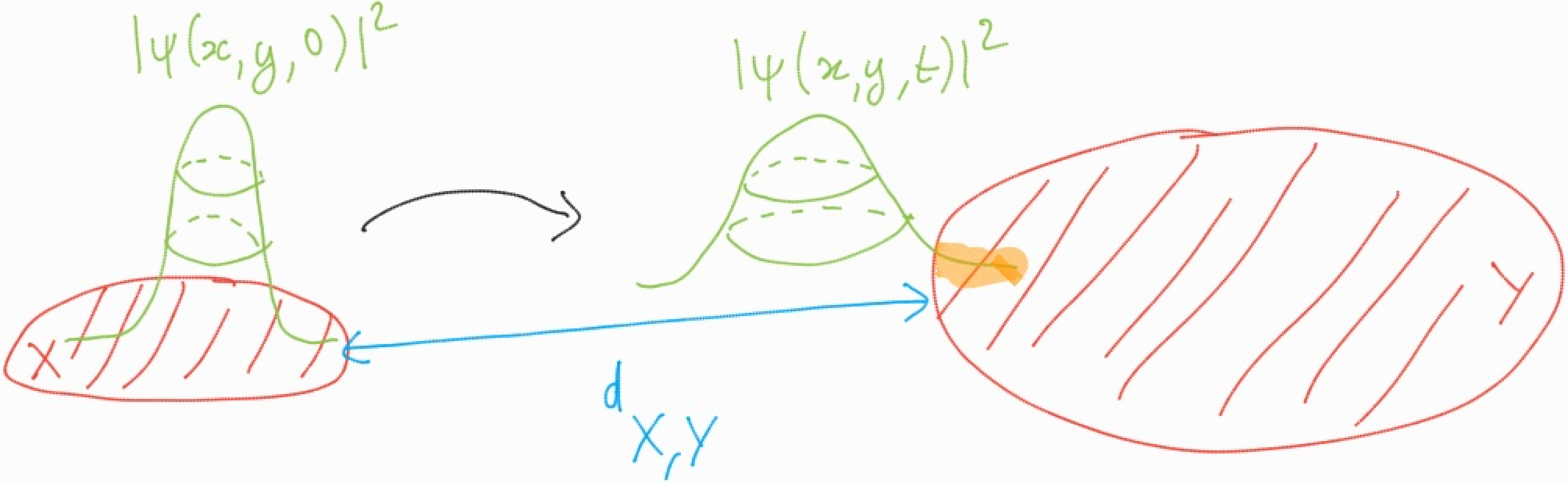
Michael Sigal, Avy Soffer, 1990

Idée:

Si la donnée initiale $\psi(x, y, z, 0)$ est supportée dans un ensemble $X \subset \mathbb{R}^3$ convexes, alors la partie de $\psi(x, y, z, t)$ qui se trouve au dessus de l'ensemble $Y \subset \mathbb{R}^3$ est petite si

$$d_{X,Y} \geq ct.$$




$|\psi(x,y,0)|^2$
$|\psi(x,y,t)|^2$
X
Y
$d_{X,Y}$

Un théorème

S. B., Jérémy Faupin, Viviana Grasselli, 2025

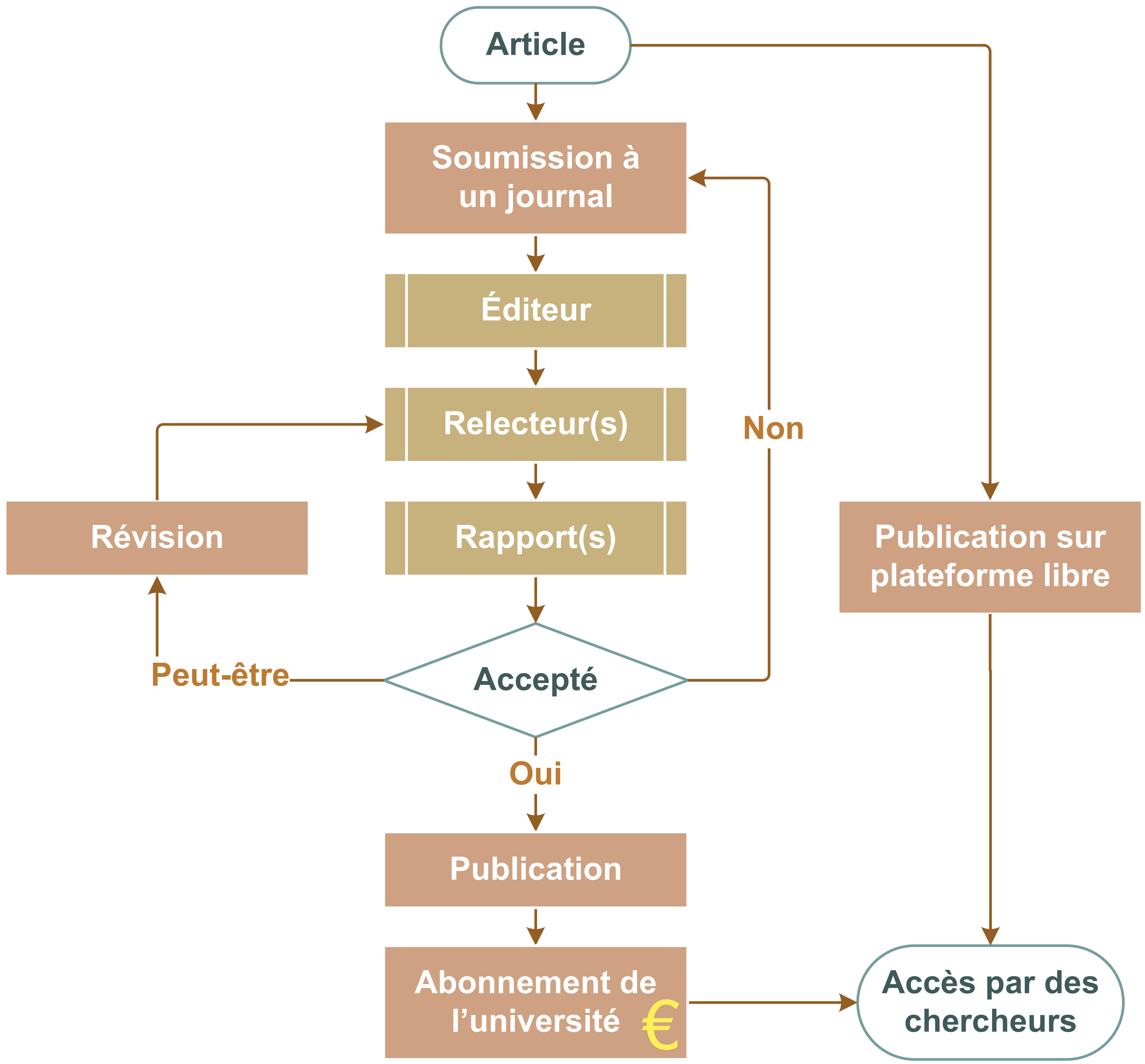
Si

- $X, Y \subset \mathbb{R}^3$ convexes,
- $V(x,y,z,t),\ \dfrac{\partial V}{\partial t}(x,y,z,t)$ bornées,
- $(x,y,z) \mapsto \psi(x,y,z,0) \in \mathscr{C}^\infty(X;\mathbb{C})$,
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x,y,z,0)|^2 = 1$,
- $i\dfrac{\partial \psi}{\partial t} = \sqrt{1-\Delta}\,\psi + V\psi$,

alors $\displaystyle\int_Y |\psi(x,y,z,t)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \le e^{2(t-d_{X,Y})}$.

Source: effective-quantum.org

Publier


Article
Soumission à un journal
Éditeur
Relecteur(s)
Rapport(s)
Révision
Non
Accepté
Peut-être
Oui
Publication
Abonnement de l'université €
Publication sur plateforme libre
Accès par des chercheurs